ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 517. 8 + 631. 527 + 631. 531.02

ЦІЛЕСПРЯМОВАНИЙ ДОБІР ПАР КУЛЬТУРНИХ РОСЛИН ДЛЯ ВИВЕДЕННЯ НОВИХ СОРТІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГОЛОВНИХ КОМПОНЕНТІВ КАНОНІЧНИХ КОРЕЛЯЦІЙ

В.В.МАРАСАНОВ – д.т.н., професор
О.В.ЛАРЧЕНКО – асистент, Херсонський ДАУ

На основі аналізу методів генетики і селекції можна зробити такі припущення:

1) Зміна головної властивості якогось виду рослини пов'язано з можливим розміром розкиду окремих часткових властивостей,

2) Найбільші зміни в бажаних властивостях можна одержати в результаті схрещування особин, що мають найбільшу варіабельність цих властивостей.

Тому при цілеспрямованому доборі варто враховувати в першу чергу лише ті ознаки, що виявляють найбільшу мінливість (найбільший розкид) при переході від одного об'єкта до другого.

У практичній і дослідницькій роботі селекціонера припадає зштовхуватися із ситуаціями, коли загальне число P ознак Xe0, X(1), X(2), …, X(P), що реєструється на кожному з множини, що обстежаться об'єктів (рослин даного типу), дуже велике, тобто є багатомірні спостереження

$$X_i = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} \\ X_i^{(2)} \\ X_i^{(P)} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

що треба осмислити і витягти потрібну інформацію. Перше природне бажання будь-якого дослідника – це уявити багатомірне спостереження у виді одного числа або хоча б у виді вектора Z деяких допоміжних показників $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(P_i)}$ з істотно меншим (чим P) числом компонент P' обумовлено такими причинами:

– необхідністю наочного уявлення вихідних даних, що досягається їхнім проектуванням на спеціально підібраний тривимірний простір (P'=3), площина (P'=2) або числову пряму;

– прагненням до лаконізму досліджуваних моделей;

– необхідністю істотного стиску обсягів збереженої статистичної інформації без істотних втрат у її інформативності.

Є три головних типи принципових передумов, що зумовлює можливість переходу від більшого числа P вихідних показників стана аналізованого об'єкта (рослини) до істотно меншого числа P' найбільше інформативних перемінних. Це, по-перше, дублювання інформації, що доставляється сильно взаємозалежними ознаками; по-друге, неінформативність ознак, що мало змінюються при переході від одного об'єкта до іншого (мала варіабельність ознак); у третіх, можливість агрегації, тобто простого або "зваженого" підсумовування по деяких ознаках. Опишемо формально задачу переходу (із найменшими втратами в інформативності) до нового набору ознак $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(P_i)}$... Нехай Z = $Z(X)$ – деяка P – мірна вектор-функція вихідних перемінних $X^{(1)}$, $X^{(1)}$, ..., $X^{(P)}$ (P'<<P) і нехай IP, (Z(X)) – визначеною уявою задана міра інформативності P-мірной системи ознак Z (X)=(Z(1) (X), Z(2) (X), ..., Z(P') (X)). Конкретний вибір функціонала Ip' (Z). Залежить від специфіки розв'язуваної задачі і спирається на один із можливих критеріїв:

– критерій автоінформативності, націлений на максимальне зберігання інформації, яка міститься у вихідному масиві $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ щодо самих вихідних ознак;

– критерій зовнішньої інформативності, націлений на максимальне «витискання» з {Xi} інформації, що утримується в цьому масиві щодо деяких інших (зовнішніх) показників.

Задача полягає у визначенні такого набору ознак Z, знайденого в класі P припустимих перетворень вихідних показників X(1), ..., X(P), що

$$Ip'(\mathrm{Z(x)}) = \max_{2 \in \mathrm{F}} \{Ip'(\mathrm{Z(X)}\} \tag{2}$$

Варіант конкретизації міри інформативності призводить до конкретного виду зниження розмірності: до методу головних компонент, факторному аналізу, угрупованню параметрів і т.д.

Відповідно до нашої задачі зупинимося на методі головних компонент. Головні компоненти являють собою ортогональні лінійні перетворення векторного випадкового розміру X, такі, що перша з них має найбільшу дисперсію, дисперсія убуває з ростом номера перемінної, так що Р-я має мінімальну дисперсію. Вибираються Р' перший головних компонент по такому правилу:

$$Z^{(i)}(X) = C_{i1}(X^{(1)} - M^{(1)}) + ...C_{ip}(X^{(P)} - M^{(P)}); i = \overline{1, p'}$$

$$\sum_{\mathrm{v}=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{C}_{\mathrm{jv}}^{2} = 1,\ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{P}} \qquad (3)$$

$$\sum_{v=1}^{p} C_{jv} C_{kv} = 0,\ j, k = \overline{1, P};\ j \neq k.$$

Тут: M(v) =M[X(v)] – математичне чекання ознаки X(v).

У якості міри інформативності Р' мірної системи показників Z(1), Z(2), ..., Z(p') прийнято вираження:

$$Ip'(\mathrm{Z(X)}) = \frac{\mathrm{DZ}^{(1)} + ... + DZ^{(P')}}{DX^{(1)} + ... + DX^{(P)}} \qquad (4)$$

Тут D – операція обчислення дисперсії.

Використання головних компонент надається найбільше природним і плідним у ситуаціях, у яких усі компоненти X(1), X(2) ..., X(P) досліджуваного вектора X мають загальну фізичну природу і відповідно обмірюванні в тих самих одиницях. Якщо ж різноманітні ознаки X(1), X(2) ..., X(P) обмірюванні в різноманітних одиницях, то результати дослідження будуть істотно залежати від вибору масштабу і природи одиниць виміру. Цей випадок характерний для задач селекції. Тому тут доцільно попередньо переходити до допоміжних безрозмірних ознак

$$\mathrm{X}_{\mathrm{v}}^{*(\mathrm{i})} \frac{\mathrm{X}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{i})} - \mathrm{M}^{(\mathrm{i})}}{\sqrt{\mathrm{Dii}}}, \qquad i = \overline{1, p} \qquad (5)$$

$$\mathrm{v} = \overline{1, \mathrm{n}}$$

Для перебування головних компонент необхідно по наявній статистичній сукупності знайти M(1), Dii, побудувати кореляційну матрицю V.

Тоді, з урахуванням 3, 5 можна записати вираження для перші головної компоненти

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{P} C_{i1} \overline{X}_i = \overline{C_1^i X}$$

Ясно, що

$$M[Z_1]=0 \quad \text{i} \operatorname{var} Z_1=[Z_1^2]=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}C_{1i}C_{1j}M[\overline{X_iX_j}]=\overline{C'_1}V\overline{C_1}=D_1 \qquad (6)$$

Вектор коефіцієнтів $\overline{C_1}$ обраний таким чином, щоб дисперсія Z1 мала максимальне значення за умови

$$\sum_{i=1}^{p}C_{1i}^2=\overline{C'_1\,C_1}=1 \qquad (7)$$

Таким чином, ми прийшли до проблеми максимізації при наявності обмежень. Вирішимо її методом невизначених множників Лагранжа. Знайдемо $\overline{C_1}$, що доставляє максимум виразенню $\overline{C'_1}V\overline{C_1}-\lambda_1(\overline{C'_1\,C_1}-1)$, де λ_1 множник Лагранжа. Узявши похідну по $\overline{C_1}$ і прирівнявши її до 0, получаємо рівняння:

$$(V-\lambda_1 I)\overline{C_1}=0 \qquad (8)$$

де I – одинична матриця. Тому що нас цікавлять рішення, коли $\overline{C_1}\neq 0$, то одержуємо

$$|V-\lambda_1 I|=0 \qquad (9)$$

Отже, λ_1 – власне число, а $\overline{C_1}$ – відповідний власний вектор. Перепишемо 8 у виді $V\overline{C_1}=\lambda\overline{C_1}$ й помножимо зліва на $\overline{C'_1}$ получимо $V\overline{C_1}=\lambda_1\overline{C'_1\,C_1}=\lambda_1$, де ліва частина відповідно до 6 є $\operatorname{var} Z_1$, а λ_1 є максимальне власне число матриці V. Щоб знайти другому головному компоненту $Z_2=\overline{C'_1\,X}$ зажадаємо виконання двох умов:

– умови нормировки $\overline{C'_1\,C_2}=1$ (10)

– умови ортогональності $\overline{C'_1\,C_2}=0$ (11)

Вектор $\overline{C_2}$ визначається тепер так, щоб $\operatorname{var}(Z_2)$, була максимальна при виконанні двох показаних умов. Ця задача потребує використання двох множників Лагранжа λ_2 і β. Ми повинні максимізировати виражения

$$\overline{C'_1}V\overline{C_2}-\lambda_2(\overline{C'_2\,C_2}-1)-\beta(\overline{C'_1\,C_2}-0) \qquad (12)$$

Узявши похідну від 12 і прирівнявши її до 0, знаходимо відповідно до умови ортогональності 11, що $\beta = 0$. А в силу умови нормировки 10 одержуємо, що λ_2 є друге по величині власне число матриці $V, \lambda_2 = \mathrm{var}(Z_2)$, а $\overline{C_2}$ – відповідний власний вектор. Процес повторюється доти, поки усі власні числа і власні вектори не виявляться дисперсіями і коефіцієнтами лінійних комбінацій головних компонент. На цьому закінчена перша частина роботи – знайдені лінійні некорреліровані комбінації ознак рослин, що схрещуються X та Y, що мають найбільший розкид (найбільші дисперсії). Визначимо їх, відповідно,

$$\overline{X} = (Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, ..., Z_p^{(1)})' = (X_1, X_2, ..., X_p)'$$

$$\overline{Y} = (Z_1^{(2)}, Z_2^{2}, ..., Z_p^{(2)}) = (Y_1, Y_2, ..., Y_p)' \qquad (13)$$

Нехай коваріаціонні (кореляційні) матриці для $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ будуть соответственно $V_{11} = M[\overline{X}, \overline{X^1}]; V_{22} = M[\overline{Y}\overline{Y'}];$ а матриця взаємної кореляції буде $V_{12} = M[\overline{X}\,\overline{Y'}]$. Нас цікавить питання перебування найбільше коррелірованих головних компонент множини $\overline{X}$ і множини $\overline{Y}$, що дає більш ощадливий опис зв'язку $\overline{X}$ і $\overline{Y}$, чим що задається матрицею V_{12}.

З урахуванням того, що $\lambda_i^{(x)} = \overline{a'_1} V_{11} \overline{a_i} = D_i^{(x)}$

$$\lambda_i^{(y)} = \overline{\beta'_i} V_{22} \overline{\beta_i} = D_i^{(y)} \qquad (14)$$

$$\overline{a'_i}\,\overline{a_i} = 1, \qquad \overline{\beta'_i}\,\overline{\beta_i} = 1$$

$$D^{(x)} = \overline{a^1} V_{11} \overline{a} = 1$$

$$D^{(y)} = \overline{\beta^1} V_{22} \overline{\beta} = 1$$

коефіцієнт кореляції між $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ буде $\rho = \overline{a}' V_{12} \overline{\beta}$ (15)

Визначимо вектори $\overline{a}$ і $\overline{\beta}$ при котрих 15 досягає максимуму при виконанні умов 14.

Запишемо для цього функцію Лагранжа

$$\psi = \overline{a}' V_{12} \overline{\beta} - v_1 (a' V_{11} \overline{a} - 1) - v_2 (\overline{\beta} V_{22} \overline{\beta} - 1) \qquad (16)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{a}} = V_{12}\bar{\beta} - 2v_1V_{11}\bar{a} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = V_{12}^1\bar{a} - 2v_2V_{22}\bar{\beta} = 0 \qquad (17)$$

Примножуючи перше рівняння на $\overline{a'}$, вдруге на $\overline{\beta'}$, одержимо:

$$2\overline{v_1}\,a'V_{11}\bar{a} = \overline{a'}V_{12}\bar{\beta}$$

$$2V_2\overline{\beta^1}V_{22}\bar{\beta} = \overline{\beta^1}V_{12}\bar{a}$$

З урахуванням обмежень $\overline{a'V_{11}}\,\bar{a} = 1$ і $\overline{\beta^1}V_{22}\bar{\beta} = 1$ і $\overline{\beta^1}V_{12}^1\bar{a} = \overline{a^1}V_{12}\bar{\beta} = \rho_1$ спричиняють рівність $2V_1 = 2V_2 = \lambda_1$. Цей розмір і є максимальне значення ρ. З першого рівняння 17 маємо:

$$\bar{a} = \frac{1}{\lambda}V_{11}^{-1}V_{12}\bar{\beta} \qquad (18)$$

Підставимо його в друге рівняння 17, одержимо

$$(V_{12}'V_{11}^{-1}V_{22} - \lambda_1V_{22})\bar{\beta} = 0$$

$$(V_{22}^{-1}V_{12}'V_{11}^{-1}V_{12} - \lambda_1I)\bar{\beta} = 0$$

так як нас цікавить ненульове вирішення, то

$$\left|V_{22}^{-1}V_{12}'V_{11}^{-1}V_{12} - \lambda_1I\right| = 0$$

Найбільше власне значення матриці $\left|V_{22}^{-1}V_{12}^1V_{11}^{-1}V_{12}\right|$ є ρ_1 а $\overline{\beta_1}$ – власний вектор. Аналогічно одержуємо $\left|V_{11}^{-1}V_{12}V_{22}^{-1}V_{12}^1 - \lambda_1I\right|\bar{a} = 0$, той же результат для ρ_1 і власний вектор $\overline{a_1}$. Тоді перша пара канонічних перемінних

$$\overline{X_1} = \overline{a_1'X}$$

$\overline{Y_1} = \overline{\beta_1'}\,\overline{Y}$ Їхній коефіцієнт кореляції $\rho = \lambda_1$.

Друга пара канонічних перемінних

$$\overline{X_2} = \overline{a_2'X}$$

$\overline{Y_2} = \overline{\beta_2 Y}$ вибирається з умови максимуму їхнього коефіцієнта кореляції $\overline{a_1'}V_{12}\overline{\beta_2}$ з урахуванням умови одиничності дисперсій і умов ортогональності $\mathrm{cov}(\overline{X_1}, \overline{X_2}) = \mathrm{cov}(\overline{Y_1}, \overline{Y_2}) = 0$, т.е. $\overline{a_1'}V_{11}\overline{a_2} = \overline{\beta_1'}V_{22}\overline{\beta_2} = \overline{\beta_1'}V_{12}\overline{a_2} = 0$

Вектори $\overline{a_2}$ і $\overline{\beta_2}$, що відповідають максимальному значенню ρ утворюються аналогічним методом – вирішенням функції Лагранжа:

$$\psi = \overline{a_2^1}V_{12}\overline{\beta_2} - V_1(\overline{a_2^1}V_{11}a_2 - 1) - V_2(\overline{\beta_2^1}V_{22}\beta_2 - 1) + V_3\overline{a_1^1}V_{11}\overline{a_2} + V_4\overline{\beta_1^1}V_{22}\overline{\beta_2} + V_5\overline{\beta_1^1}V_{12}\overline{a_2}$$

З урахуванням умови ортогональності після узяття производних одержуємо $V_3 = V_4 = V_5 = 0$, з урахуванням нормировки, $2V_1 = 2V_2 = \lambda_2$. Друге найбільше значення ρ_2 є друге по розмірі власне число матриці $V_{22}^{-1}V_{12}'V_{11}^{-1}V_{12}$, а вектор $\overline{\beta_2}$ є власний вектор цієї матриці, (аналогічно знаходиться вектор $\overline{a_2}$).

Продовжуючи цю процедуру можемо одержати набір коефіцієнтів кореляції між парами канонічних перемінних $(\overline{X_i}, \overline{Y_i})$ і, аналізуючи значимі з погляду абсолютних значень ρ_i підбирати сполучення параметрів що схрещуються примірників рослин відповідно до поставленого критерію (на врожайність, на якість, на усталеність, на агротехнічні ознаки).

Таким чином, запропонований метод цілеспрямованого пошуку пар для схрещування зводиться до двох етапів: перший – пошук головних компонент параметрів рослин, які схрещуються і визначення їхньої кількості, виходячи з максимуму сумарної дисперсії, обумовлених головними компонентами; другий – перебування канонічних кореляцій для знайдених пар головних компонент і повторних векторів, елементами яких є знайдені головні компоненти. У цьому головне утримання запропонованого алгоритму спрямованого пошуку. Перевірка значимості знайдених канонічних коефіцієнтів кореляції може бути проведена по узагальненому критерії хі-квадрат Пірсона. Експериментальна перевірка для конкретних видів рослин може дати: повне підтвердження запропонованого методу, часткове підтвердження або повне заперечення. Швидше за все найбільше ймовірним є другий вихід у силу стохастичности вихідного матеріалу. З іншої сторони запропонований метод не суперечить теорії природного добору і прояву «божого промислу» у створенні видів рослин із винятковими властивостями.

Література:
1. Т.Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. -Г.: Физматгиз. -1963
2. Х.Шмальц. Селекция растений. Г.:Колос. -1973
3. Рабочяя книга по прогнозированию. Под.ред. И.В.Бестужева-Лады. Г.: Мысль. -1982

УДК: 333.42: 631.3: 635.64 (833)

МОДЕЛЬ КОРЕКТУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ВИРОЩУВАННЯ ТОМАТІВ

Г.Ф.КІВЕР – к.с.-г.н., ІЗЗ УААН
А.А.МОСКАЛЕНКО – аспірант,
В.В.КРІНІЦИН – пошукач, Херсонський ДАУ

Проблеми, що виникають при ринкових взаємовідносинах агентів економічної взаємодіяльності вимагають удосконалення методів прийняття управляючих рішень. Зокрема, рішення, що приймаються по підтримці технологічного циклу вирощування сільськогосподарських культур, як основної складової виробничо-економічної системи, повинні бути спрямовані, перш за все, на ефективне використання ресурсів, бути економічно виправдані. Тому створення ресурсозберігаючих технологій слід вважати головним напрямом досліджень в АПК.

На практиці ресурсні обмеження і організаційно-виробничі умови стримують використання типових "оптимальних" технологій. При цьому відхилення в рішеннях і результатах їх реалізації можуть бути значними. В умовах, коли неможливо гарантувати "оптимальні" технології управління, корисним буде надання фахівцеві можливості формувати власну технологію, спираючись на ресурсні можливості і особисте розуміння ситуації, що складається на полі.

Однак для того, щоб здійснити комплекс розрахунків, потрібен спеціальний інструментарій. В основу створення такого інструментарію нами покладено евристико-оптимізаційні підходи і методи лінійного програмування.

В цьому випадку тревиальною можна вважати модель, функцією мети якої є мінімізація витрат на проведення технології:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{n} B_{ji}\delta_{jk} + \sum_{j=1}^{m} C_{qij}V_{qij}, \qquad (1)$$